La respuesta buena es siempre a)
Por favor ver el quiz1v2, para mejor explicación
Primer parcial. Matemática VII 9:30-11:30 Miércoles 24 de enero de 2007
Este examen vale 25 puntos para un total de 100 puntos.

Nombre:
Carnet:

1 (4pt) La distribución $(e^{\lambda x}-1)\delta''(x)$ es:

a) $\lambda^2\delta(x) - 2\lambda(x)\delta'(x)$

b) $\lambda^2\delta(x) + 2\lambda(x)\delta'(x)$

c) $2\lambda^2\delta(x) - 4\lambda(x)\delta'(x)$

d) $2\lambda^2\delta(x) + 2\lambda(x)\delta'(x)$

Solución
En general, como puedes ver en otro examen

$$f(x)\delta''(x) = f''(0)\delta(x) - 2f'(0)\delta'(x) + f(0)\delta(x) \tag{1}$$

Trata de entender el signo menos, por favor.

2 (4pt) ¿Cuál es solución de la ecuación diferencial $x^2u''(x) + xu'(x) - 4u(x) = 0$ en el sentido de las distribuciones?

a) $2\delta'(x)$

b) $3\delta(x) + \delta'(x)$

c) $\delta(x)$

d) $\delta'(x) - \delta(x)$

Solución En este caso $L = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} - 4$. Calculamos

$$x^2\delta''(x) = 2\delta(x) \qquad x^2\delta'''(x) = 6\delta'(x) \qquad x^2\delta''''(x) = 12\delta''(x) \tag{2}$$
$$x\delta'(x) = -\delta(x) \qquad x\delta''(x) = -2\delta'(x) \qquad x\delta'''(x) = -3\delta''(x) \tag{3}$$

De manera que:

$$L\delta(x) = 2\delta(x) - \delta(x) - 4\delta(x) = -3\delta(x) \tag{4}$$
$$L\delta'(x) = 6\delta'(x) - 2\delta'(x) - 4\delta'(x) = 0 \tag{5}$$
$$L\delta''(x) = 12\delta''(x) - 3\delta''(x) - 4\delta''(x) = 5\delta''(x) \tag{6}$$

La solución es obvia.

3 (4pt) La integral de $\int_{-1}^{1}|x|\cos(2x)dx$ es

a) $\frac{1}{2}\cos(2) + \sin(2) - \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}\cos(2) + \sin(2) + \frac{1}{2}$

c) $\cos(2) - \sin(2) - \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}\cos(2) - \sin(2) - \frac{1}{2}$

Solución
Definimos:

$$\phi(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otro x} \end{cases} = x(H(x) - H(x-1)) - x(H(-x) - H(1-x)) \tag{7}$$

De manera que $I = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\cos(2x)dx = \frac{-1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \phi''(x)\cos(2x)dx$. La segunda derivada generalizada es:

$$\phi_g'(x) = (H(x) - H(x-1)) - H(-x) - H(1-x)) + x(\delta(x) - \delta(x-1)) - x(-\delta(-x) + \delta(1-x)) =$$
$$(H(x) - H(x-1)) - (H(-x) - H(1-x)) - 2\delta(x-1)$$
$$\phi''(x) = -2\delta(x-1) + 2\delta(x) - 2\delta'(x-1)$$

De manera que la integral es finalemnte:

$$I = \frac{-1}{4}\left(-2\cos(2) + 2 - 4\sin(2)\right) \tag{8}$$

4 (4pt) El límite $n \to \infty$ de $f_n(x) = \begin{cases} n^2 & \text{si} \quad -1/n < x < 0 \\ -n^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1/n \end{cases}$ es

a) $\delta'(x)$

b) $\delta(x)$

c) $\delta(x) + \delta'(x)$

d) 0

Solución
Hay que ver cuanto vale el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_{-1/n}^{0} g(x)dx - \int_0^{1/n} g(x)dx\right) \tag{9}$$

En la segunda integral hacemos un cambio de variable para asemejarla a la primera integral

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1/n}^{0}\left(g(x) - g(-x)\right)dx \tag{10}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $t = nx$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0}\frac{g(t/n) - g(-t/n)}{1/n}dt \tag{11}$$

ahora podemos meter el límite dentro de la integral

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(t/n) - g(-t/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} t\frac{g(t/n) - g(0) + g(0) - g(-t/n)}{t/n} = 2tg'(0) \tag{12}$$

Sumando las piezas vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_n(x)dx = 2g'(0)\int_{-1}^{0} tdt = g'(0) \tag{13}$$

Luego el límite es $-\delta'(x)$

5 (4pt) ¿Pueden multiplicarse dos distribuciones cualesquiera?

a) No, porque el producto de distribuciones no está definido.

b) Si, las distribuciones se pueden multiplicar igual que las funciones.

c) Si, las distribuciones se pueden multiplicar usando el producto distribucional.

d) No, porque en general una de las distribuciones pudiese no ser regular.

6 (2pt) ¿Cuál es la derivada generalizada de la función de Heaviside?

a) La delta de Dirac.

b) Ella misma

c) No tiene derivada generalizada porque ella misma es una distrubución

d) No tiene derivada generalizada porque se precisa para definir la derivada generalizada

7 (3pt) ¿Cuánto vale la integral $\int_{-2}^{2} \delta(x-3)\cos(\pi(x-2))dx$

a) 0

b) -1

c) ∞

d) 1